Complexe Analyse, Hertentamen 2
29/08/07, 14.00–17.00 uur

1. Los op de vergelijking $\sin z = i$.

2. Definieer de functie $f(z)$ door $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, waarbij de (Fibonacci) rij (a_n) gegeven wordt door

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

   (a) Geef een expliciete uitdrukking voor deze functie $f(z)$.
   Aanwijzing: schrijf $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, 'vul de recursie in', en herorden de ontstane reeksen.

   (b) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks.
   Aanwijzing: gebruik de vorm van $f(z)$ in (a), of gebruik een expliciete voorstelling voor a_n.

3. Beschouw voor $n \in \mathbb{N}$ de functie

$$f(z) = \frac{1}{e^{z^n} - 1}.$$

   (a) Bepaal de orde van de singulariteit van $f(z)$ in $z = 0$.

   (b) Bepaal het residu van $f(z)$ in $z = 0$ voor $n = 1, 2, 3$.

4. Hoe luidt de maximum-modulus stelling? Bepaal de maximum modulus van de functie $z(z+i)(z+2i)$ voor $|z| \leq 1$. Beargumenteer het antwoord.

5. Laat C de in positieve zin doorlopen cirkel met straal 2 rond de oorsprong zijn. Bereken voor $a \in \mathbb{C}$ de integraal

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^3 + az}{z^4 + 1}\, dz$$

   via de volgende stappen.

   (a) Toon aan dat de nulpunten van $z^4 + 1 = 0$ worden gegeven door

$$z_k = e^{\pi i/4 + k\pi i/2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

   (b) Bepaal de som

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{z_k^2}.$$

   (c) Bepaal de bovenstaande integraal via residuen rekening.

6. Bepaal met behulp van residuenrekening de volgende oneigenlijke integraal

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2}\, dx, \quad a, b \geq 0.$$